

Przykład 1a) Rozwiąż równanie $2x^3 - 250 = 0$.

$$2x^3 = 250 \quad / : 2$$

$$x^3 = 125$$

Jedyną liczbą spełniającą równanie jest $\sqrt[3]{125}$, czyli $x = 5$.b) Rozwiąż równanie $5x^3 + 40 = 0$.

$$5x^3 = -40 \quad / : 5$$

$$x^3 = -8$$

Jedyną liczbą spełniającą równanie jest $\sqrt[3]{-8}$, czyli $x = -2$.**Ćwiczenie 1**

Rozwiąż równanie.

a) $7x^3 - 56 = 0$

c) $8x^3 - 1 = 0$

e) $5x^3 + 0,625 = 0$

b) $2x^3 + 54 = 0$

d) $27x^3 + 8 = 0$

f) $3x^3 - 192 = 0$

Przykład 2a) Rozwiąż równanie $x^3 - 4x = 0$.

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias}$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 4 = 0$$

Równość $x^2 - 4 = 0$ zachodzi, gdy $x = -2$ lub $x = 2$.Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -2 , 0 i 2 .b) Rozwiąż równanie $x^3 + 9x = 0$.

$$x(x^2 + 9) = 0 \quad \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias}$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 + 9 = 0$$

Równanie $x^2 + 9 = 0$ jest sprzeczne.Zatem jedynym rozwiązaniem jest liczba 0 .**Ćwiczenie 2**

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 9x = 0$

c) $4x^3 - x = 0$

e) $x^3 = 36x$

b) $x^3 + 64x = 0$

d) $9x^3 + x = 0$

f) $x^3 = -4x$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x(x+2)(x-3) = 0$.

Korzystamy z podanej obok własności i otrzymujemy:

$$x = 0 \text{ lub } x + 2 = 0 \text{ lub } x - 3 = 0.$$

$a \cdot b \cdot c = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy
 $a = 0$ lub $b = 0$ lub $c = 0$.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: 0, -2 i 3.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x(x-2)(x-4) = 0$

b) $x(x-5)(x+6) = 0$

c) $x(x+1)(2x+6) = 0$

d) $(x+1)(x+9)(3x-1) = 0$

e) $(x-9)(2x+1)(2x-3) = 0$

f) $(4x+1)(6x-9)(2x-8) = 0$

1. Rozwiąż równanie.

a) $3x^3 + 27 = 51$

b) $64x^3 + 7 = 8$

c) $2x^3 + 300 = 50$

d) $27x^3 + 9 = 8$

e) $x(x^2 + 2) = 2(x + 32)$

f) $x(x^2 - 4) = -4(x + 2)$

2. Ile rozwiązań równania należy do podanego przedziału?

a) $x^3 - 16x = 0$, $\langle -2; 6 \rangle$

b) $x^3 - 25x = 0$, $\langle -3; 5 \rangle$

c) $x^3 - 3x = 0$, $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$

d) $4x - x^3 = 0$, $(-2; 4)$

e) $4x + x^3 = 0$, $(-4; 0)$

f) $x^3 - 6x = 30x$, $(-8; 8)$

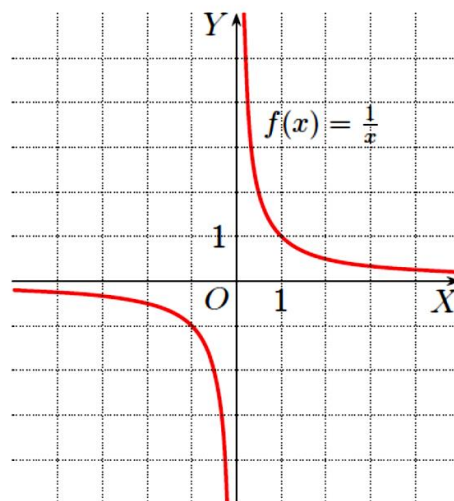
Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Sporządzamy tabelę wartości funkcji f , a następnie szkicujemy jej wykres.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, oraz każdą krzywą powstałą z tego wykresu przez przesunięcie równoległe nazywamy **hiperbolą**.

Własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne ($f(x) < 0$), natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości dodatnie ($f(x) > 0$),
- funkcja f nie ma miejsc zerowych,
- funkcja f jest **malejąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$.



Uwaga. Zauważ, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest malejąca w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Hiperbola składa się z dwóch gałęzi.

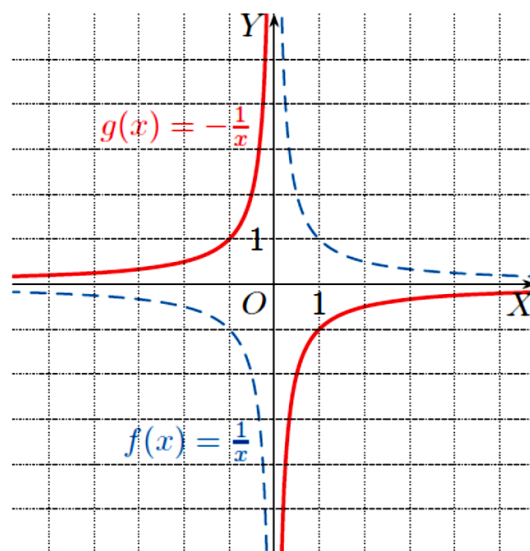
Zauważmy, że wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ „zbliża się” do prostej poziomej $y = 0$ i do prostej pionowej $x = 0$. O takich prostych mówimy, że są **asymptotami** wykresu funkcji. Proste poziome nazywamy **asymptotami poziomymi**, proste pionowe – **asymptotami pionowymi**.

Aby narysować wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$, można sporządzić odpowiednią tabelę wartości funkcji lub wykorzystać wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Przypomnijmy, że wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy, odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y = f(x)$.

Własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości ujemne,
- funkcja g nie ma miejsc zerowych,
- funkcja g jest **rosnąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$, ale nie jest funkcją rosnącą w swojej dziedzinie,
- prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą, a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową wykresu funkcji g .



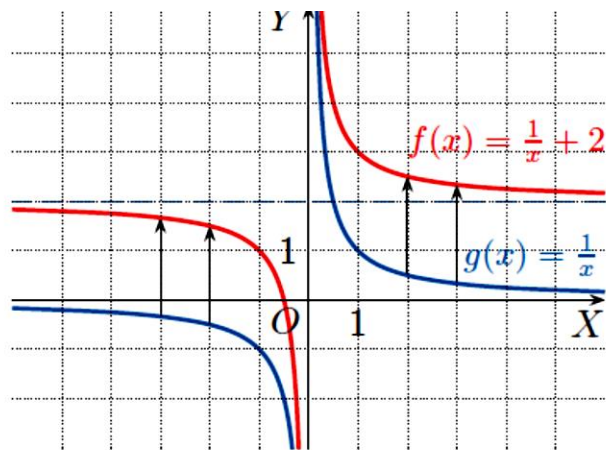
- Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ należy punkt P . Naszkicuj ten wykres.
 - $P(4, \frac{1}{2})$
 - $P(-\frac{1}{9}, -3)$
 - $P(8, -\frac{1}{2})$
 - $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli $y = \frac{a}{x}$?
 - $P(-1, 8)$
 - $P(4, -16)$
 - $P(-\frac{1}{7}, 2)$
 - $P(-5, -25)$

Uwaga: należy wstawić do wzoru współrzędne punktu P .

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = \frac{1}{x}$ o 2 jednostki w górę.

Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f , a prosta $x = 0$ – jego asymptotą pionową. Zbiorem wartości funkcji f jest $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.



Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, a następnie, stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g . Podaj zbiór wartości funkcji g oraz równania asymptot jej wykresu.

- $g(x) = \frac{1}{x} + 3$
- $g(x) = \frac{1}{x} - 1$
- $g(x) = \frac{1}{x} - 3$

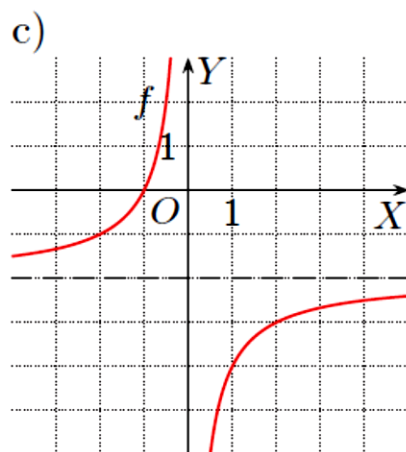
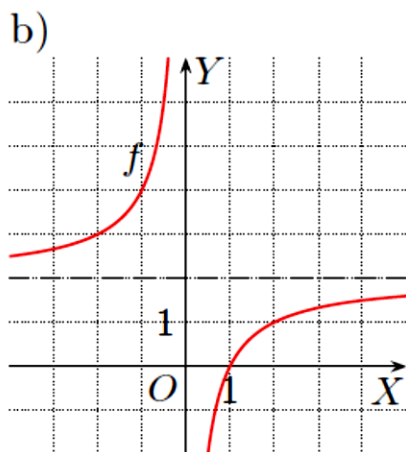
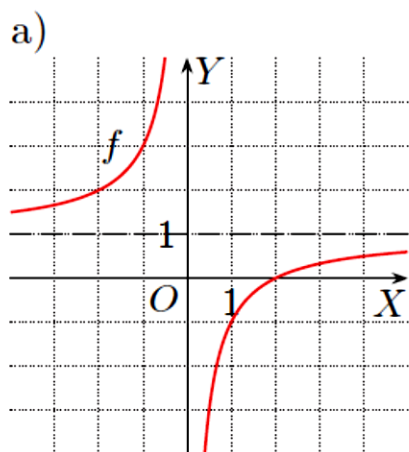
Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY .

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.
 - $f(x) = -\frac{1}{x} - 1$
 - $f(x) = \frac{3}{x} - 2$
 - $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$
 - $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$
 - $f(x) = \frac{6}{x} - 3$
 - $f(x) = -\frac{1}{2x} + 1$

2. Naskicuj wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g , jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot, jeśli wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f :

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ o 2 jednostki w górę, b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ o 2 jednostki w dół.

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{x} + a$. Podaj parametr a oraz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f .



4. Dla jakich wartości współczynnika q punkt P należy do wykresu funkcji f ?

a) $f(x) = \frac{6}{x} + q$, $P(3, 1)$

c) $f(x) = -\frac{1}{3x} + q$, $P(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

b) $f(x) = -\frac{2}{x} + q$, $P(-6, -\frac{1}{2})$

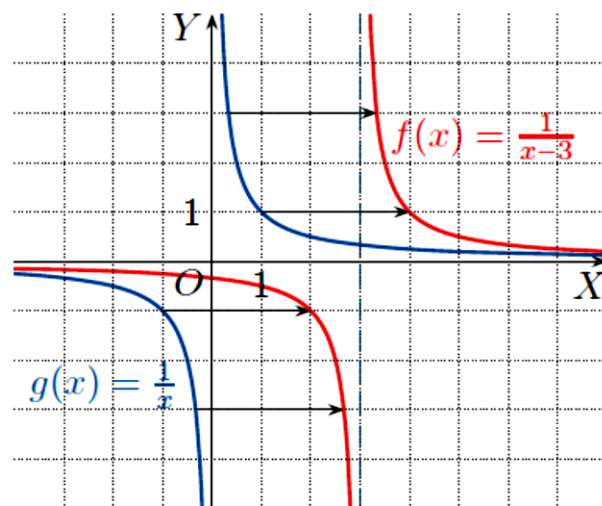
d) $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{x} + q$, $P(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Przykład 1

Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. Prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f , a prosta $y = 0$ – jego asymptotą poziomą.



Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę tej funkcji i równania asymptot jej wykresu.

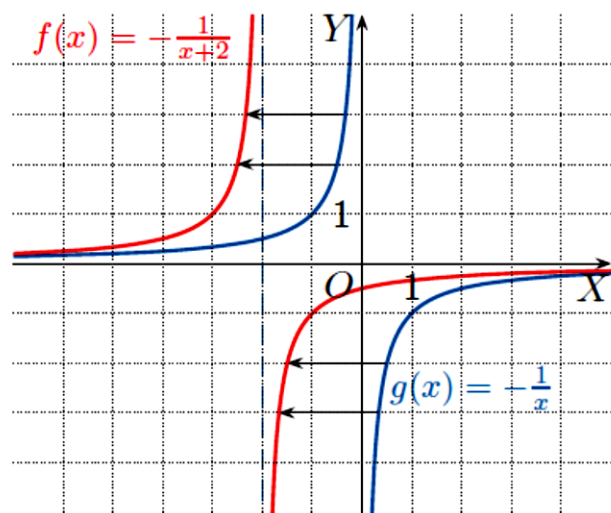
a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$.

Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w lewo.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = -2$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.



Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX .

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = -\frac{2}{x+3}$ e) $f(x) = -\frac{4}{x+4}$
b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ d) $f(x) = \frac{3}{x+2}$ f) $f(x) = \frac{4}{x+4}$

4. Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj równania ich asymptot.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ b) $f(x) = \frac{4}{x+1}$, $g(x) = \frac{4}{x+1} - 2$

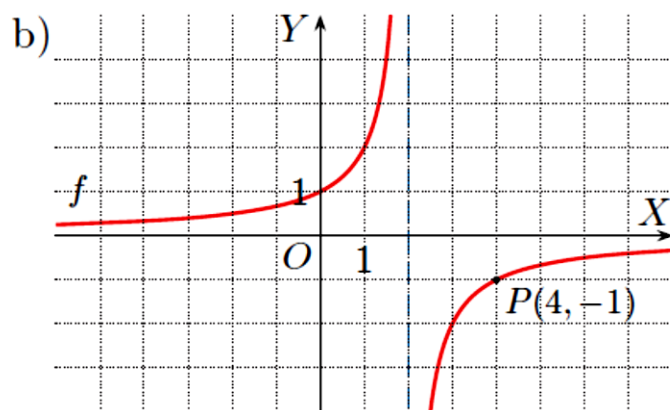
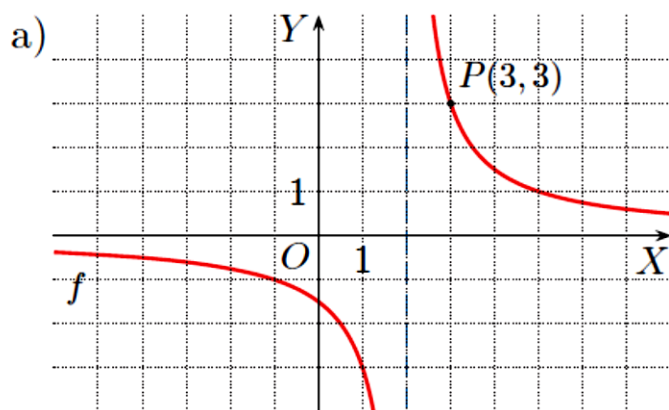
1. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{-4}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x+3}$ d) $f(x) = \frac{2}{x-2}$

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x-a}$, jeśli jego asymptota pionowa przechodzi przez punkt Q .

a) $Q(1, 6)$ b) $Q(-3, 8)$ c) $Q(\frac{1}{2}, 0)$ d) $Q(-\frac{3}{2}, 15)$

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-2}$ dla pewnego a . Wyznacz wzór funkcji f . Oblicz $f(1\frac{3}{4})$ i $f(-4)$.



Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{2x+8}$.

$2x+8=0$ dla $x=-4$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $-\frac{3}{4x}$

b) $\frac{6}{x-5}$

c) $\frac{x-3}{2x+6}$

d) $\frac{-x^2+9}{-2x+7}$

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla $x=1$ oraz $x=-1$.

a) $\frac{x+1}{x}$

b) $\frac{2x+4}{x-3}$

c) $\frac{4x}{x^2-9}$

d) $\frac{x+3}{x^2+3}$

Czasami wyrażenie wymierne można uprościć. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

a) Uprość wyrażenie $\frac{8x^2}{2x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{8x^2}{2x} = 4x$$

b) Uprość wyrażenie $\frac{x-3}{2x-6}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

$$\frac{x-3}{2x-6} = \frac{x-3}{2(x-3)} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{6x^2}{4x}$

c) $\frac{2x-2}{x-1}$

e) $\frac{x^2-x}{x}$

g) $\frac{x^2-1}{x-1}$

b) $\frac{4x}{2x^2}$

d) $\frac{x+2}{3x+6}$

f) $\frac{2x^2+4x}{x}$

h) $\frac{x+2}{x^2-4}$

Przykład 1

a) Wykonaj mnożenie $\frac{x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{2x^2}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$.

$$\frac{x}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{\cancel{x-2}}{2x^2} = \frac{\cancel{x}}{2x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2x}$$

b) Wykonaj mnożenie $\frac{16}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{2}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

$$\frac{16}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{2} = \frac{8 \cancel{16}}{\cancel{x-3}} \cdot \frac{1 \cdot \cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{2}_1} = 8x + 24$$

Ćwiczenie 1

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj mnożenie.

a) $\frac{6x}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x^2}$

c) $\frac{x+1}{x-3} \cdot \frac{2x-6}{x}$

e) $\frac{2x-10}{x+1} \cdot \frac{3x+3}{x-5}$

b) $\frac{2x+4}{4x} \cdot \frac{8x^2}{2x+4}$

d) $\frac{x-4}{18x} \cdot \frac{12}{4-x}$

f) $\frac{2x+2}{x-2} \cdot \frac{x-3}{3x+3}$

Ćwiczenie 2

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj mnożenie.

a) $\frac{14}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{7}$

c) $\frac{x^2}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x}$

e) $\frac{4x^2-1}{4} \cdot \frac{6}{2x-1}$

b) $\frac{24}{x^2-16} \cdot \frac{x-4}{3}$

d) $\frac{2x}{x+6} \cdot \frac{x^2-36}{x^2}$

f) $\frac{3x+2}{3} \cdot \frac{12}{9x^2-4}$

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $\frac{4}{x+4} : \frac{2}{3x+12}$.

Zakładamy, że $x+4 \neq 0$ i $3x+12 \neq 0$,
zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

$$\frac{4}{x+4} : \frac{2}{3x+12} = \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{x+4}_1} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{(x+4)}^1}{\cancel{2}_1} = 6$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

dla $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Ćwiczenie 3

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj dzielenie.

a) $\frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8}$

c) $\frac{18}{2x-6} : \frac{-3}{4x-12}$

e) $\frac{9x}{2x+4} : \frac{6}{x+2}$

b) $\frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3}$

d) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$

f) $\frac{10x^2}{x-5} : \frac{5}{10-2x}$

Przykład 3

a) Wykonaj dodawanie $\frac{2}{x} + \frac{1}{3x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot x} + \frac{1}{3x} = \frac{6}{3x} + \frac{1}{3x} = \frac{7}{3x} \quad \begin{array}{l} \text{wspólnym mianownikiem} \\ \text{obu ułamków jest } 3x \end{array}$$

b) Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x+2} - \frac{3x}{2x+4}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x}{2x+4} = \frac{2}{2(x+2)} - \frac{3x}{2x+4} = \frac{2}{2x+4} - \frac{3x}{2x+4} = \frac{2-3x}{2x+4} \quad \begin{array}{l} \text{wspólnym mianow-} \\ \text{nikiem obu ułam-} \\ \text{ków jest } 2x+4 \end{array}$$

Ćwiczenie 4

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działanie.

a) $\frac{6}{x} + \frac{5}{2x}$

c) $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{2x-4}$

e) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{2x-5}{4x-12}$

b) $\frac{4}{3x} - \frac{3}{4x}$

d) $\frac{x}{3x+3} - \frac{1}{x+1}$

f) $\frac{2x-1}{3x+6} - \frac{x-1}{x+2}$

Przykład 4

a) Wykonaj dodawanie $\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x} &= \frac{-4x}{(2x+1)x} + \frac{2(2x+1)}{(2x+1)x} = \quad \begin{array}{l} \text{wspólnym mianownikiem} \\ \text{obu ułamków jest } (2x+1)x \end{array} \\ &= \frac{-4x+4x+2}{(2x+1)x} = \frac{2}{(2x+1)x} \end{aligned}$$

b) Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2-9}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2-9} &= \frac{1}{x-3} - \frac{x}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{x}{(x-3)(x+3)} = \quad \begin{array}{l} \text{wspólnym mianownikiem} \\ \text{obu ułamków jest} \\ (x+3)(x-3) \end{array} \\ &= \frac{x+3-x}{(x-3)(x+3)} = \frac{3}{x^2-9} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działanie.

a) $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{x+3}$

c) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x+3}$

e) $\frac{x+6}{x^2-9} + \frac{-2}{x+3}$

b) $\frac{x-5}{x} - \frac{x}{x+2}$

d) $\frac{6}{x-2} - 3$

f) $\frac{8}{x^2-16} + \frac{4}{x-4}$

1. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj mnożenie. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = \frac{1}{2}$.

a) $\frac{x-2}{x} \cdot \frac{3x^2}{2x-4}$

c) $\frac{x^3}{3-x} \cdot \frac{3x-9}{x}$

e) $\frac{(x+1)^2}{3x-1} \cdot \frac{6x-2}{x+1}$

b) $\frac{4x}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x^2}$

d) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2} \cdot \frac{2x^3}{2x-1}$

f) $\frac{2+x}{x-4} \cdot \frac{(4-x)^2}{4x+8}$

2. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj dzielenie. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{1}{2}$.

a) $\frac{3}{4x} : \frac{1}{2x^2}$

c) $\frac{4x+2}{x^2} : \frac{2}{x}$

e) $\frac{x}{x-4} : \frac{3}{2x-8}$

b) $\frac{6}{5x^2} : \frac{3}{10x}$

d) $\frac{6x-9}{x} : \frac{3}{x^2}$

f) $\frac{20x}{3x-1} : \frac{5}{2-6x}$

5. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działanie.

a) $\frac{x}{x-2} + \frac{2-2x}{x-2}$

c) $\frac{-x}{x+4} - \frac{3-x}{2x+8}$

e) $\frac{x-1}{2x+4} + \frac{x+7}{3x+6}$

b) $\frac{x+3}{2x-1} + \frac{3x+1}{1-2x}$

d) $\frac{2}{2-3x} - \frac{1+x}{6x-4}$

f) $\frac{2x}{10x-15} - \frac{x-2}{2x-3}$

6. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działanie. Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $x = -2$.

a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x}$

c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2-x}$

e) $\frac{3}{2x-1} + \frac{3}{2x+1}$

b) $\frac{1}{3x} - \frac{1}{2x}$

d) $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x}$

f) $\frac{x}{x-4} - \frac{x}{4+x}$